مقارنة بعض طرق تقدير معالم توزيع ويبل ذى المعلمتين باستخدام المحاكاة

A comparison of Some Methods to Estimate parameters for Two-Parameters Weibull Distribution Using Simulation

د. وائل سعد حسانين الدواخلى

مدرس بقسم الإحصاء والرياضة والتأمين

كلية التجارة – جامعة عين شمس

الملخص:

يهدف هذا البحث إلى تقدير معلمتى ودالة موثوقية توزيع ويبل ذى المعلمتين بالاعتماد على أربعة طرق فى التقدير وهى الإمكان الأكبر Maximum Likelihood (MLE)، طريقة العزوم Method of Moments (MOM)، طريقة إنحدار الرتبة Rank Regression Method (RRM)، طريقة كثافة القوة Power Density Method (PDM)، بالإضافة إلى طريقة خامسة تتضمن اشتقاق صيغة لمقدر خليط Mixture Method (Mix) ناتج من اعتماد مقدر الإمكان الأكبر بنسبة (P) ومقدر العزوم بنسبة (1-P)، وتم استخدام أسلوب المحاكاة للمقارنة بين كل من طرق التقدير الخمسة للتوصل إلى أفضل طريقة لتقدير المعلمات ودالة الموثوقية، حيث تمت عملية المحاكاة بتوليد بيانات عشوائية تتبع توزيع ويبل بالاعتماد على ستة نماذج كالتالى:

(β = 0.5 , 1, 1.5 , 2 , 2.5 , 3) ، (θ= 1 , 1 , 1.5 , 1.5 , 2 , 2) وعلى أحجام عينات (n = 20 , 50, 75, 100, 120)، وتكرار كل تجربة (R = 1000)، وتمت المقارنة بين هذه الطرق باستخدام كل من متوسط مربعات الخطأ (MSE) وخطأ التحيز المطلق للمتوسط (MABE)، وتوصل الباحث إلى أفضلية طريقة انحدار الرتبة Rank Regression Method (RRM) مقارنة بالطرق الأخرى، وفى الجانب التطبيقى تم حساب دالة الموثوقية ومعلمتى توزيع ويبل لبيانات حقيقية خاصة بفاقد محصول القمح فى مصر، وتوصل الباحث إلى أفضلية طريقة انحدار الرتبة (RRM) أيضًا.

الكلمات المفتاحية:

الموثوقية، توزيـع ويبل ذى المعلمتين، طريقة الإمكان الأكبر، طريقة العزوم، طريقة الخليط، طريقة انحدار الرتبة، طريقة كثافة القوة، المحاكاة.

Abstract

This research aims to estimate the two parameters and reliability function of the two-parameters Weibull distribution based on four estimation methods: Maximum likelihood (MLE), Method of Moments (MOM), Rank Regression Method (RRM), Power Density Method (PDM). In addition to a fifth method that includes deriving a formula for a mixture estimator (Mix) resulting from adopting Maximum Likelihood estimator by a ratio (P) and a moment estimator by a ratio (1-P). Simulation method was used to compare each of the five estimation methods to reach the best method to estimate parameters and reliability function. Simulation process was done by generating random data that follows Weibull distribution, based on six models as follows:(θ= 1 , 1 , 1.5 , 1.5 , 2 , 2) , (β = 0.5 , 1, 1.5 , 2 , 2.5 , 3), and based on sample sizes (n = 20, 50, 75, 100, 120), repetitions of each experiment (R = 1000). A comparison was made among these methods using mean square error (MSE) and mean absolute bias error (MABE). The researcher found that superiority of the Rank Regression Method (RRM) compared to other methods. On the applied side, the reliability function and the Weibull distribution parameters were calculated for real data on wheat crop losses in Egypt, the researcher also found the superiority of the Rank Regression Method (RRM).

Keywords:

Reliability, Two-parameters Weibull distribution, Maximum likelihood Method, Method of Moments, Mixture Method, Rank Regression Method, Power Density Method, Simulation.

المقدمة:

يعتبر توزيع ويبل أحد التوزيعات المستمرة وأحد نماذج الفشل الشائعة الاستخدام، حيث كان له مكانة وأهمية فى حقل الموثوقية (Reliability) واختبار الحياة (life testing) والقيم المتطرفة وكذلك مراقبة الجودة، وقد ساهم كثير من الباحثين فى دراسة خصائص هذا التوزيع وبحث طرق تقدير معلماته والمتمثلة فى معلمة الشكل (β) ومعلمة القياس (θ) لتوزيع ويبل ذى المعلمتين. وتعد عملية تقدير المعالم المجهولة للتوزيعات الاحتمالية من المسائل المهمة التى حظيت باهتمام الباحثين والمهتمين بالإحصاء الرياضى نظراً إلى تطور طرق التقدير وتباينها، والذى يؤدى إلى مراعاة الدقة فى التقدير عن طريق إيجاد أفضل تقدير لهذه المعالم. وقد اعتمدت هذه الدراسة على خمسة طرق مختلفة لتقدير معلمتى توزيع ويبل وهى الإمكان الأكبر Maximum Likelihood (MLE) وطريقة العزوم Method of Moments (MOM) وطريقة الخليط Mixture Method (Mix) وطريقة انحدار الرتبة Rank Regression Method (RRM) وطريقة كثافة القوة Power Density Method (PDM)، وسوف يتم المقارنة بينهم باستخدام المعيار الإحصائى متوسط مربعات الخطأ Mean Square Error (MSE) وكذلك معيار خطأ التحيز المطلق للمتوسط Mean Absolute Bias Error (MABE) وذلك فى الجانب التجريبى عن طريق المحاكاة ثم فى الجانب التطبيقى باستخدام بيانات فعلية لفاقد محصول القمح فى مصر عن الفترة من ٢٠٠٠ – ٢٠٢٢.

مشكلة البحث:

أخذت مشكلة التقدير اهتمامًا واسعًا فى التطبيقات الإحصائية والهندسية ومختلف العلوم التطبيقية لما تقدمه من وسائل ساعدت فى التعرف بصورة أكثر دقة على العديد من العمليات التى تتضمن أخطاء عشوائية، وسوف يتضمن هذا البحث مجموعة من الطرق لتقدير معلمتى توزيع ويبل والمقارنة بين هذه الطرق بالاعتماد

على المقاييس الإحصائية لمعرفة الأفضل منها عند أحجام عينات مختلفة وكذلك عند قيم مختلفة لمعلمتا توزيع ويبل باستخدام أسلوب المحاكاة.

أهمية البحث:

تكمن أهمية هذا البحث فى تسليط الضوء على توزيع ويبل واستخداماته وكيفية تقدير معالمه، بالإضافة إلى استخدام أحد الأساليب الإحصائية للمقارنة بين طرق التقدير المختلفة مثل متوسط مربعات الخطأ وكذلك خطأ التحيز المطلق للمتوسط، مع إبراز دور المحاكاة فى دراسة سلوك مقدرات توزيع ويبل تحت ظروف تقدير مختلفة.

أهداف البحث:

١- إيجاد صيغ لتقدير معلمات ودالة موثوقية توزيع ويبل ذى المعلمتين باستخدام خمسة طرق وهى الإمكان الأكبر Maximum Likelihood (MLE) وطريقة العزوم Method of Moments (MOM) وطريقة الخليط Mixture Method (Mix) وطريقة انحدار الرتبة Rank Regression Method (RRM) وطريقة كثافة القوة Power Density Method (PDM)، بهدف الوصول إلى أفضل طريقة لتقدير تلك الدالة بالاعتماد على المقياس الإحصائي متوسط مربعات الخطأ وكذلك خطأ التحيز المطلق للمتوسط، وباستخدام المحاكاة لتوليد العينات العشوائية اللازمة لذلك.

٢- معرفة مدى تأثير التغير الحادث (بالزيادة أو النقصان) فى حجم العينة على دقة طرق التقدير محل الدراسة.

٣- تطبيق هذا التوزيع على بيانات حقيقية تتضمن فاقد محصول القمح فى مصر خلال الفترة ٢٠٠٠ – ٢٠٢٢ (باعتبار توزيع ويبل أحد التوزيعات الاحتمالية التى يمكن عن طريقها قياس معدلات الفشل، بالإضافة إلى ارتفاع معدلات فاقد محصول القمح فى مصر بشكل كبير)، حيث عرفت منظمة الأغذية والزراعة (الفاو) الفاقد من الأغذية على أنه انخفاض فى جميع مراحل السلسلة الغذائية من الحصاد حتى الاستهلاك، ويمكن تصنيف الفاقد فى المحاصيل الزراعية عموماً إلى: فاقد ما قبل الحصاد وهو الفاقد الذى

يحدث للنبات أثناء تواجده فى الحقل قبل عملية الحصاد عن طريق الإصابات الفطرية والبكتيرية والحشرية أو تعرض النباتات لمهاجمة الطيور والقوارض، وفاقد أثناء الحصاد وهو الذى يحدث ما بين بداية الحصاد ونهايته نتيجة تكسير الحبوب أثناء الحصاد أو استخدام الطرق البدائية للحصاد أو عملية الدراس، وأخيراً فاقد ما بعد الحصاد وهو الذى يحدث للمحصول من بعد الحصاد وحتى الاستهلاك أو التصنيع نتيجة المراحل التى يمر بها المحصول من بعد الحصاد مثل التجفيف، الدراس، التعبئة، النقل، التخزين.

وسوف يتم ذلك باستخدام طرق التقدير المقترحة بهدف الوصول إلى أفضلهم باستخدام معيارى متوسط مربعات الخطأ وخطأ التحيز المطلق للمتوسط.

فروض البحث:

١- أفضلية طريقة Mixture Method (Mix) فى تقدير معلمتى توزيع ويبل سواء على المستوى التجريبى باستخدام المحاكاة أو على المستوى التطبيقى باستخدام بيانات فاقد محصول القمح فى مصر عن بقية الطرق المقترحة.

٢- يمكن تمثيل بيانات فاقد محصول القمح فى مصر باستخدام توزيع ويبل ذى المعلمتين.

الدراسات السابقة:

١- **دراسة (Almazah and Ismail, 2021)**[١٤] : هدفت هذه الدراسة إلى تقدير معلمات توزيع ويبل ثنائى المعلمة باستخدام ثلاث طرق وهى الإمكان الأكبر ودالة الخسارة الأسية الخطية المعدلة وطريقة الانحدار المستندة إلى طريقة وايت لتقدير المعلمات، وقد تم تقييم الكفاءة النسبية لهذه الطرق باستخدام معيار الحد الأدنى لمتوسط مربعات الخطأ، حيث تم إجراء دراسة محاكاة لمقارنة أحجام العينات (١٠ ، ٥٠، ١٠٠ ، ١٥٠)، وتوصلت الدراسة إلى أفضلية طريقة الإمكان الأكبر لجميع أحجام العينات المستخدمة فى الدراسة.

٢- **دراسة (Onay.et. al, 2021)**[٢٠]: هدفت هذه الدراسة إلى تثبيت نظام تحويل طاقة الرياح إلى منطقة ما عن طريق تحديد خصائص سرعة الرياح لتلك المنطقة، واعتمدت الدراسة على توزيع ويبل ثنائى المعلمة باعتباره فعال للغاية فى نمذجة خصائص سرعة الرياح، حيث تم تحليل بيانات سرعة الرياح لـ ٣٢ مدينة فى ثلاث مناطق مختلفة نسبياً فى تركيا لتقدير معلمات توزيع ويبل باستخدام ثلاث طرق معروفة وهى Graphical Method (GM)، Maximum Likelihood Method (MLM)، Justus Moment Method (JMM)، وكذلك ثلاث طرق حديثة لتقدير المعلمات وهى Energy Pattern Factor method (EPFM)، Wind Energy Intensification Method (MEIM)، Power Density Method (PD) تم اقتراحها فى السنوات الأخيرة. حيث تمت مقارنة النتائج باستخدام المعاملات الخاصة بكل من خطأ طاقة الرياح والجذر التربيعى لمتوسط مربعات الخطأ وكذلك معامل التحديد. وقد أظهرت النتائج أنه فى حين أن طريقة (PD) لديها أداء نموذجى مرتفع إلا أن طريقة (JMM) تقترب منها فى الأداء فى معظم الحالات.

٣- **دراسة (بدر والحكيم، ٢٠١٩)**[٣] **:** هدفت هذه الدراسة إلى تقدير دالة الموثوقية لتوزيع ويبل ذى المعلمتين باستخدام أسلوب المحاكاة بطريقة مونت كارلو للمقارنة بين طرق التقدير الثلاثة وهى الإمكان الأكبر والعزوم والمربعات الصغرى بهدف الوصول إلى أفضل طريقة لتقدير تلك الدالة، وقد توصل الباحثان إلى أفضلية طريقة الإمكان الأكبر فى تقدير دالة الموثوقية مقارنة مع باقى طرق التقدير وذلك بالاعتماد على المقياس الإحصائى متوسط مربعات الخطأ التكاملى Integral Mean Squared Error (IMSE).

٤- **دراسة (راهى وشرهان،٢٠١٩)**[٧]: تناول هذا البحث تقدير معلمة الشكل (β) ومعلمة القياس (η) لدالة توزيع ويبل ذى المعلمتين باستخدام التقدير الخطى لتحويل التوزيع إلى نموذج انحدار خطى بسيط ومن ثم استخدام طريقة المربعات الصغرى الاعتيادية (OLS) وطريقة المربعات الصغرى الموزونة (WLS) والمقارنة بينهما من خلال أصغر متوسط مربعات خطأ ممكن، كما تم استخدام بيانات فعلية لأعداد الوافدين (مختلف الجنسيات)، وقد اتضح أفضلية طريقة المربعات الصغرى الموزونة.

٥- **دراسة (Teyabeen. et. al, 2017)**[23]: هدفت الدراسة إلى مقارنة تقديرات سبعة طرق عددية لتقدير معلمات توزيع ويبل ومعرفة الطريقة الأكثر كفاءة، حيث تم الاعتماد على بيانات سرعة الرياح التى تم جمعها فى منطقة زوارة بدولة ليبيا على ثلاث ارتفاعات مركزية هى ١٠، ٣٠، ٥٠ متر فوق سطح الأرض عن طريق تسجيل سرعة الرياح كل ١٠ دقائق، وكانت الطرق السبعة المستخدمة فى التقدير هى Graphical Method ، Standard Deviation Method ، Empirical Method of Justus ، Empirical Method of Lysen ، Energy Pattern Factor Method، Maximum Likelihood Method ، Modified Maximum Likelihood Method، وتمت مقارنة أداء هذه الطرق باستخدام ثلاث معايير إحصائية هى خطأ التحيز المطلق للمتوسط والجذر التربيعى لمتوسط مربعات الخطأ ومعامل الارتباط، حيث أشارت النتائج إلى أنه إذا كان توزيع ويبل يتطابق بشكل جيد مع بيانات سرعة الرياح المرصودة فإن الطرق التجريبية لكل من Lysen and Justus تكون هى الأفضل من حيث الكفاءة، وإن لم يكن كذلك فإن طريقة Maximum Likelihood تكون هى الأفضل، بينما كانت Graphical Method ذات أداء ضعيف.

٦- **دراسة (قمر وعبود، ٢٠١٦)**[١١]: هدفت هذه الدراسة إلى تقدير معلمتى توزيع ويبل باستخدام المحاكاة، حيث تم تطبيق طريقتى الإمكان الأكبر وبيز لتقدير معلمتا الشكل (β) والقياس (θ)، وقد تم توليد عينات عشوائية بافتراض قيم معلومة للمعلمات، ثم تمت المقارنة بين نتائج هاتين الطريقتين حيث تبين أفضلية طريقة بيز فى التقدير.

٧- **دراسة (عطا وعباس،٢٠١٤)**[٩]: هدفت هذه الدراسة إلى تقدير معلمات وموثوقية توزيع الفشل الخطى العام، وهو من التوزيعات الهامة لدراسة وقت التشغيل لحين الفشل للمعدات والأنظمة، وتم تقدير معلمة الموقع (α) ومعلمة القياس (β) مع اعتبار معلمة الشكل (θ) معلومة، وقد استخدمت ثلاث طرق فى التقدير وهى الإمكان الأكبر والمربعات الصغرى وطريقة مقترحة تتضمن اشتقاق صيغة لمقدر خليط ناتج من اعتماد مقدر الإمكان الأكبر بنسبة (P) ومقدر المربعات الصغرى بنسبة (1-P)، واشتقت صيغة هذا المقدر وأجريت تجارب المحاكاة عند أحجام عينات (١٥ ، ٣٠ ، ٥٠ ، ٧٥ ، ١٠٠)، كما تم استخدام متوسط مربعات الخطأ (MSE) لمقارنة المقدرات، حيث تم التوصل إلى أفضلية طريقة الإمكان الأكبر عن باقى الطرق المستخدمة.

٨- **دراسة (Nwobi and Ugomma, 2014)**[١٩]: هدفت هذه الدراسة إلى المقارنة بين الطرق المختلفة لتقدير معلمات توزيع ويبل ذو المعلمتين باستخدام متوسط مربعات الخطأ، حيث تضمنت المقارنة بين ثلاث طرق للرسم البيانى وهى Mean Rank (MR) ، Median Rank (MDR)، Symmetric Cumulative Distribution Function (SCDF)، كما تضمنت المقارنة أيضاً بين ثلاث طرق تحليلية وهى الإمكان الأكبر والعزوم والمربعات الصغرى. وأظهرت النتائج أفضلية طريقة Mean Rank (MR) من بين طرق الرسم البيانى، وكذلك أفضلية طريقة الإمكان الأكبر من بين الطرق التحليلية.

٩- **دراسة (العبيدي، ٢٠١٠)**[٢]: هدفت هذه الدراسة إلى تقدير معلمتى توزيع ويبل باستخدام أسلوب المحاكاة، وتم تطبيق طريقة المربعات الصغرى عند قيم مختلفة لمعلمة الشكل ($\beta = 5, 10, 15$) وعند معلمة القياس ١٠ = α، وتم توليد بيانات حقيقية عند أحجام عينات مختلفة ($n = 10, 20, 30, 40$)، وكذلك توليد بيانات تقديرية بالاعتماد على قيم مقدرات المعلمتين، ثم تمت مقارنة حسن مطابقة مجموعتى البيانات الحقيقية والتقديرية لتوزيع ويبل ذى المعلمتين باستخدام طريقتى الرسم البيانى والزمن الكلى، وخلصت الدراسة إلى أفضلية طريقة الرسم البيانى لبيان مدى ملائمة البيانات لتوزيع ويبل ذى المعلمتين.

بعد الاطلاع على هذه المجموعة من الأبحاث والدراسات السابقة ذات الصلة بموضوع البحث، تبين أنها تحاول الوصول إلى أفضل طريقة تقدير لمعالم توزيع ويبل باستخدام العديد من طرق التقدير المختلفة عن طريق المحاكاة، وما يميز الدراسة الحالية عن سابقاتها هو استخدام بعض طرق التقدير الحديثة نسبياً مع طرق التقدير التقليدية بهدف المقارنة بينهم، كما أن استخدام طريقة الخليط Mixture Method (Mix) بين مقدرى الإمكان الأكبر والعزوم يعد حديث نسبياً، بالإضافة إلى التطبيق على بيانات حقيقية تخص فاقد محصول القمح فى مصر.

عينة البحث:

طبقت هذه الدراسة على بيانات فاقد محصول القمح فى مصر عن الفترة ٢٠٠٠ – ٢٠٢٢، وقد تم الحصول عليها من بيانات وزارة الزراعة واستصلاح الأراضى، قطاع الشئون الاقتصادية، نشرات الاقتصاد الزراعى، أعداد مختلفة.

١- الجانب النظرى

١-١ بعض المفاهيم الأساسية[٣، ١٢]

١-١-١ دالة الموثوقية Reliability Function R(t)

تُعرف الموثوقية على أنها احتمال بقاء النظام فى العمل أو عدم فشل النظام فى أداء عمله خلال المدة الزمنية [0 , t]، بمعنى بقاء النظام فى العمل بعد مرور الوقت (t $t > 0$)، ويُعبر عنها رياضيًا كالتالى:

$$R(t) = pr\,(T > t)$$

$$= \int_{t}^{Max(t)} f(u)\,du$$

حيث أن t هى وقت العمل ويكون أكبر من أو يساوى صفر، بينما نجد أن T هى الزمن المتراكم لحياة النظام خلال المدة [0 , t]، كما تمثل f(u) دالة كثافة الفشل للزمن t. وتعتبر دالة الموثوقية دالة متناقصة مع الزمن وتنحصر قيمتها بين الصفر والواحد الصحيح.

١-١-٢ دالة الكثافة الاحتمالية للفشل

Failure Probability Density Function F(t)

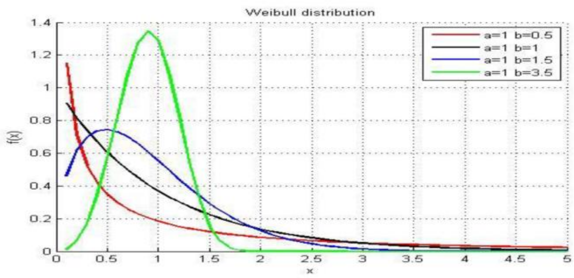
تُعرف دالة الكثافة الاحتمالية للفشل بأنها احتمال فشل النظام خلال الفترة $(t + \Delta t)$ علماً بأنه كان يعمل عند الزمن t، ويرمز لها بالرمز f(t)، كما يُعبر عنها رياضيا كالتالى:

$$f(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{pr\left[t < T < t + \Delta t\right]}{\Delta t} \quad , \quad t \geq 0$$

وتمثل Δt التغير فى قيمة المتغير العشوائى T بحيث أن $\Delta t = t_i - t_{i-1}$، وتكون قيمة هذه الدالة دائماً أكبر من أو يساوى صفر، ويتم حساب احتمال حدوث الفشل فى المدة $(t , t + \Delta t)$ رياضيًا كالتالى:

$$pr\ (t \le T \le t + \Delta t) = \int_{t}^{t+\Delta t} f(u)\,du$$

ويوضح الشكل رقم (١) دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع ويبل ذى المعلمتين عند بعض القيم المختلفة لمعالمه.



شكل رقم (١)
دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع ويبل ذى المعلمتين

١-١-٣ دالة الكثافة التجميعية للفشل

Failure Cumulative Density Function F(t)

تُعبر دالة الكثافة التجميعية للفشل والتى يرمز لها بالرمز F (t) عن احتمال فشل النظام قبل الوقت t، كما تسمى أيضًا بدالة اللاموثوقية ويعبر عنها رياضيًا كالتالى:

$$F\ (t) = pr\ (T \le t)$$

$$= \int_{o}^{t} f(u)\,du$$

حيث أن T هى الوقت اللازم حتى حدوث الفشل، وأن f (u) هى دالة كثافة الفشل للزمن t. وهى دالة متزايدة مع الزمن وتنحصر قيمتها بين الصفر والواحد الصحيح، كما تُعتبر دالة الكثافة التجميعية للفشل مكملة لدالة الموثوقية بحيث أن

.$F\ (t) = 1 - R\ (t)$

١-١-٤ دالة المخاطرة Hazard Function h (t)

تُسمى دالة المخاطرة أيضًا بمعدل الفشل ويرمز له بالرمز h (t)، ويُعرف على أنه احتمال فشل النظام خلال المدة الزمنية $(t\ ,\ t + \Delta t)$ بشرط أن يعمل النظام (بدون فشل) حتى الوقت t، ويُعبر عن ذلك رياضياً كالتالى:

$$h(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\left[\frac{pr(t<T<t+\Delta t/T>t)}{\Delta t}\right]$$

$$=\frac{f(t)}{R(t)}$$

حيث يتضح أن دالة المخاطرة (معدل الفشل) يتناسب طرديًا مع دالة الكثافة الاحتمالية للفشل f (t) وعكسيًا مع دالة الموثوقية R (t).

٢- توزيع ويبل (Weibull Distribution)[٦ ، ١١]

لتكن $t_1\ , t_2\ , \ldots.. , t_n$ تمثل عينة عشوائية حجمها n من توزيع ويبل ذى المعلمتين $(\beta\ , \theta)$ والمعرف بالدالة الاحتمالية:

$$f(t,\theta,\beta)=\frac{\beta}{\theta}t^{\beta-1}e^{\frac{-t^{\beta}}{\theta}} \qquad (1)$$

بحيث أن : $\theta,\beta>0 \quad ; \quad t>0$

θ: معلمة القياس (Scale parameter)

β : معلمة الشكل (Shape parameter)

وتكون دالة التوزيع التراكمى (الدالة التجميعية) لتوزيع ويبل كالتالى:

$$F(t)=\int_0^t\frac{\beta}{\theta}u^{\beta-1}\ \exp\left[-\frac{u^{\beta}}{\theta}\right]du$$

$$F(t)=1-\exp\left[-\frac{t^{\beta}}{\theta}\right] \qquad (2)$$

أما بالنسبة لدالة الموثوقية لتوزيع ويبل فهى كالتالى:

$$R(t) = 1 - F(t)$$

$$R(t) = \exp\left[-\frac{t^{\beta}}{\theta}\right] \qquad (3)$$

وتكون دالة المخاطرة (معدل الفشل) كالتالى:

$$h(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{\beta}{\theta}\, t^{\beta-1} \qquad (4)$$

ومن هذه المعادلة يمكن ملاحظة الآتى:

- عندما $\beta > 1$ تكون دالة المخاطرة متزايدة مع t
- عندما $\beta < 1$ تكون دالة المخاطرة متناقصة مع t
- عندما $\beta = 1$ فإن دالة المخاطرة تكون ثابتة

كما يأخذ العزم الرائى لتوزيع ويبل الصيغة التالية:

$$M_r = \theta^{\frac{r}{\beta}}\, \Gamma\left(\frac{r}{\beta} + 1\right) \qquad (5)$$

وبالتالى تصبح قيمتا العزمين الأول والثانى $(r = 1 , 2)$ كالتالى:

$$M_1 = E(t) = \theta^{\frac{1}{\beta}}\, \Gamma\left(\frac{1}{\beta} + 1\right) = \text{Mean}(\bar{t}) \qquad (6)$$

$$M_2 = E(t^2) = \theta^{\frac{2}{\beta}}\, \Gamma\left(\frac{2}{\beta} + 1\right)$$

وتصبح قيمة التباين كالتالى:

$$\text{Var}(t) = E(t^2) - [E(t)]^2$$

$$\text{Var}(t) = \theta^{\frac{2}{\beta}}\left[\Gamma\left(\frac{\beta+2}{\beta}\right) - \Gamma^2\left(\frac{\beta+1}{\beta}\right)\right] \qquad (7)$$

٣- طرق تقدير معلمتى توزيع ويبل

سوف يتم تناول خمسة طرق مختلفة لتقدير معلمتى توزيع ويبل بهدف المقارنة بينهم وهم الإمكان الأكبر (MLE) Maximum Likelihood، طريقة العزوم Method of Moments (MOM)، طريقة الخليط Mixture Method (Mix)، طريقة انحدار الرتبة (RRM) Rank Regression Method، طريقة كثافة القوة (PDM) Power Density Method.

٣-١ طريقة الإمكان الأكبر

[17 ، 5 ، 1]Maximum Likelihood Method (MLE)

تهدف طريقة الإمكان الأكبر (MLE) إلى جعل دالة الإمكان الأكبر ويرمز لها بالرمز (L) للمتغيرات العشوائية عند نهايتها العظمى، كما أنه توجد لدى مقدرات هذه الطريقة خصائص جيدة منها أنها غير متحيزة فى حالة كبر حجم العينة وتكون كافية ولها أقل تباين ممكن وكذلك تكون أكثر دقة من طرق التقدير الأخرى عند زيادة حجم العينة، فإذا كان المتغير العشوائى T يمثل متغير الزمن وله دالة كثافة احتمالية وفقاً للمعادلة (١)، فتكون دالة الإمكان الأكبر (L) للمتغيرات العشوائية المستقلة $T_1, T_2, \ldots, T_n$ لعينة حجمها n هى:

$$L(T_1, T_2, \ldots, T_n, \beta, \theta) = f(t_1, \beta, \theta).f(t_2, \beta, \theta)\ldots f(t_n, \beta, \theta)$$

$$\therefore L = \prod_{i=1}^{n} f(t_i, \beta, \theta) \qquad (8)$$

وحيث أن الصورة العامة لدالة الإمكان الأكبر هى:

$$L = \frac{n!}{(n-r)} \prod_{i=1}^{r} f(t_i, \theta)[1 - F(t_r)]^{n-r} \qquad (9)$$

$0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_r$

n : حجم العينة t_i : زمن فشل الوحدة i

r : بيانات المراقبة الفاشلة t_r : زمن فشل الوحدة الأخيرة

n-r : البيانات المتبقية بعد الزمن t_r

وبالتعويض عن دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع ويبل من المعادلة (٨) فى دالة الإمكان الأكبر بالمعادلة (٩) نحصل على المعادلة التالية:

$$L=\frac{n!}{(n-r)!}\prod_{i=1}^{r}\frac{\beta}{\theta}t_i^{\beta-1}\,e^{\frac{-t_i^{\beta}}{\theta}}\,[R(t_r)]^{n-r} \qquad (10)$$

وبالتعويض عن دالة الموثوقية R (t) من المعادلة (٣) وبفرض أن $K=\frac{n!}{(n-r)!}$ فى المعادلة (١٠) تصبح دالة الإمكان الأكبر كالتالى:

$$L=k\left[(\frac{\beta}{\theta})^r\prod_{i=1}^{r}t_i^{\beta-1}\,e^{\frac{-\sum_{i=1}^{r}t_i^{\beta}}{\theta}}\right]\left[e^{\frac{-t_r^{\beta}}{\theta}}\right]^{n-r}$$

$$L=K(\frac{\beta}{\theta})^r\prod_{i=1}^{r}t_i^{\beta-1}\,e^{\frac{-1}{\theta}\left[\sum_{i=1}^{r}t_i^{\beta}+(n-r)t_r^{\beta}\right]} \qquad (11)$$

وبأخذ اللوغاريتم الطبيعى لطرفى المعادلة (١١) نحصل على:

$$\log L=\log K+r\log\beta-r\log\theta+(\beta-1)\sum_{i=1}^{r}\log t_i-\frac{1}{\theta}\left[\sum_{i=1}^{r}t_i^{\beta}+(n-r)t_r^{\beta}\right] \qquad (12)$$

وباشتقاق المعادلة (١٢) إشتقاقاً جزئياً بالنسبة لمعلمة القياس (θ) ومعلمة الشكل (β)، ثم مساواة كل مشتقة مع الصفر نحصل على مقدرات الإمكان الأكبر لهما كالآتى:

$$\frac{\partial\log L}{\partial\theta}=\frac{-r}{\theta}+\frac{1}{\theta^2}\left[\sum_{i=1}^{r}t_i^{\beta}+(n-r)t_r^{\beta}\right] \qquad (13)$$

$$\frac{\partial\log L}{\partial\beta}=\frac{r}{\beta}+\sum_{i=1}^{r}\log t_i-\frac{\sum_{i=1}^{r}t_i^{\beta}(1)\log t_i+(n-r)t_r^{\beta}\log t_r}{\theta} \qquad (14)$$

وبما أن :

$$\frac{\partial \log L}{\partial \theta}=0$$

$$\frac{\partial \log L}{\partial \beta}=0$$

فإن قيمة $(\hat{\theta})$ ستكون:

$$\hat{\theta}_{MLE}=\frac{\sum_{i=1}^{r} t_i^{\hat{\beta}}+(n-r)\,t_r^{\hat{\beta}}}{r} \qquad (15)$$

وللحصول على قيمة $\hat{\beta}$ فإنه:

$$0=\frac{r}{\hat{\beta}}+\sum_{i=1}^{r}\log t_i-\frac{\sum_{i=1}^{r} t_i^{\hat{\beta}}\mathrm{Log}t_i+(n-r)\,t_r^{\hat{\beta}}\,\mathrm{Log}t_r}{\hat{\theta}} \qquad (16)$$

وبالتعويض عن قيمة $(\hat{\theta})$ من المعادلة (١٥) فى المعادلة (١٦) نحصل على:

$$\sum_{i=1}^{r}\mathrm{Log}t_i=\frac{\sum_{i=1}^{r} t_i^{\hat{\beta}}\mathrm{Log}t_i+(n-r)\,t_r^{\hat{\beta}}\,\mathrm{Log}t_r}{\dfrac{\sum_{i=1}^{r} t_i^{\hat{\beta}}+(n-r)\,t_r^{\hat{\beta}}}{r}}-\frac{r}{\hat{\beta}}$$

وبتبسيط المعادلة نحصل على:

$$\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}\mathrm{Log}t_i=\frac{\sum_{i=1}^{r} t_i^{\hat{\beta}}\mathrm{Log}t_i+(n-r)\,t_r^{\hat{\beta}}\,\mathrm{Log}t_r}{\sum_{i=1}^{r} t_i^{\hat{\beta}}+(n-r)\,t_r^{\hat{\beta}}}-\frac{1}{\hat{\beta}} \qquad (17)$$

وبحل المعادلة (١٧) بإحدى الطرق التكرارية مثل طريقة نيوتن رافسن نحصل على قيمة $\hat{\beta}_{MLE}$ ثم نعوض بها فى المعادلة (١٥) للحصول على قيمة $\hat{\theta}_{MLE}$

٣-٢ طريقة العزوم Method of Moments (MOM) [٣ ، ٨]

تُعد طريقة العزوم من الطرق الشائعة الاستخدام نظرًا لسهولتها، وتتلخص فكرتها فى مساواة عزوم المجتمع (M_j) المجهولة مع عزوم العينة (m_j) المعلومة ثم إيجاد

صيغة تقدير للمعلمات. وحيث أن معامل الاختلاف Coefficient of variation (C.V) يأخذ الصيغة التالية:

$$C.V=\sqrt{\frac{var}{(mean)^2}}$$

وبالتعويض عن قيمتى المتوسط والتباين من المعادلتين (٦) ، (٧) فإنه:

$$C.V=\sqrt{\frac{\Gamma\left[\frac{\beta+2}{\beta}\right]-\Gamma^2\left[\frac{\beta+1}{\beta}\right]}{\Gamma^2\left[\frac{\beta+1}{\beta}\right]}} \tag{18}$$

ومن بيانات العينة يمكن إيجاد تقدير لمعامل الاختلاف كالتالى:

$$C.V=\sqrt{\frac{S^2}{(\bar{t})^2}}$$

حيث أن:

$$\bar{t}=\frac{\sum_{i=1}^{r}t_i}{r} \quad , \quad S^2=\frac{\sum_{i=1}^{r}t_i^2-n(\bar{t})^2}{n-1}$$

وبالتالى يمكن استخدام المعادلة (١٨) فى تقدير قيمة المعلمة $\hat{\beta}_{MOM}$ ، ثم استخدامها فى تقدير قيمه للمعلمة $\hat{\theta}_{MOM}$ بالتعويض فى المعادلة التالية:

$$\hat{\theta}_{MOM}=\left(\frac{\bar{t}}{\Gamma(\frac{\hat{\beta}+1}{\hat{\beta}})}\right)^{\hat{\beta}} \tag{19}$$

٣-٣ طريقة الخليط Mixture Method (Mix) [9 ، 6]

تتضمن طريقة الخليط (Mix) اشتقاق صيغة لمقدر خليط يمثل تركيب خطى من مقدرين آخرين، فإذا افترضنا أنه يمكن اعتماد مقدر الإمكان الأكبر بنسبة (P)

ومقدر العزوم بنسبة (1-P) بحيث تمثل P نسبة مساهمة كل مقدر من هذين المقدرين فى تكوين المقدر المختلط الجديد والذى يُرمز له بالرمز $\hat{\theta}_{mix}$ فإنه يأخذ الصيغة التالية:

$$\hat{\theta}_{mix} = p\,\hat{\theta}_1 + (1-p)\,\hat{\theta}_2$$

بحيث أن $\hat{\theta}_1$ ترمز إلى مقدر الإمكان الأكبر، وترمز $\hat{\theta}_2$ إلى مقدر العزوم، كما أن P ثابت بحيث أن $0 \le P \le 1$ ويتم تحديد قيمته التى تعمل على تصغير متوسط مربعات الخطأ للمقدر المختلط $Mse(\hat{\theta}_{mix})$ كالتالى:

$$p = \frac{Mse(\hat{\theta}2) - Cov(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)}{Mse(\hat{\theta}_1) + Mse(\hat{\theta}_2) - 2Cov(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)} \qquad (20)$$

وبنفس الطريقة يمكن الحصول على قيمة p التى تجعل متوسط مربعات الخطأ أقل ما يمكن للمقدر المختلط $Mse(\hat{\beta}_{mix})$ بالصيغة التالية:

$$p = \frac{Mse(\hat{\beta}_2) - Cov(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)}{Mse(\hat{\beta}_1) + Mse(\hat{\beta}_2) - 2\,Cov(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)} \qquad (21)$$

ويصبح المقدر المختلط الجديد $\hat{\theta}_{mix}$ ، $\hat{\beta}_{mix}$ كالتالى:

$$\hat{\theta}_{mix} = p\,\hat{\theta}_{mom} + (1-p)\,\hat{\theta}_{mle} \qquad (22)$$

$$\hat{\beta}_{mix} = p\,\hat{\beta}_{mom} + (1-p)\,\hat{\beta}_{mle} \qquad (23)$$

٣-٤ طريقة انحدار الرتبة Rank Regression Method (RRM) [14، 15، 22]

تُعرف طريقة انحدار الرتبة (RRM) باسم طريقة المربعات الصغرى ويتم تطبيقها بشكل كبير فى المشكلات الهندسية والرياضية، حيث يُخفض مبدأ المربعات الصغرى المسافة العمودية بين نقاط البيانات والخط المستقيم الممثل لهذه البيانات. ويمكننا الحصول على علاقة خطية بين معلمتى توزيع ويبل، فإذا كانت دالة الكثافة التجميعية لمعلمتى توزيع ويبل هى:

$$F(\theta,\beta) = 1 - e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^{\beta}} \quad , \; t > 0$$

ويمكن إعادة كتابتها على الصورة:

$$[1-F(t)]^{-1}=e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^{\beta}} \qquad (24)$$

بأخذ اللوغاريتم لطرفى المعادلة (٢٤) نحصل على:

$$-\ln[1-F(t)]=\left(\frac{t}{\theta}\right)^{\beta} \qquad (25)$$

وبأخذ اللوغاريتم مرة ثانية لطرفى المعادلة (٢٥) نحصل على:

$$\ln\{-\ln[1-F(t)]\}=\beta\ln t-\beta\ln\theta \qquad (26)$$

ويمكن إعادة كتابة المعادلة (٢٦) على الصورة التالية:

$Y = bX + a$

بحيث أن:

$Y = \ln\{-\ln[1-F(t)]\}$, $X = \ln t$,

$a = -\beta\ln\theta$, $b = \beta$

وبالتالى تصبح صيغة الإنحدار الخطى لكل من b ، a كالتالى:

$$b=\frac{n\sum_{i=1}^{n}X_iY_i-\sum_{i=1}^{n}X_i\sum_{i=1}^{n}Y_i}{n\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)^2} \qquad (27)$$

$$\hat{a}=e^{-\left(\frac{c}{\hat{\beta}}\right)} \qquad (28)$$

حيث أن: $C=\bar{y}-\hat{\beta}\,\bar{x}$, $\hat{\beta}=b$

٣-٥ طريقة كثافة القوة Power Density Method (PDM) [14، 16، 21]

اقترح كل من (Akdag & Ali, 2009)[13] طريقة جديدة لتقدير معلمتى توزيع ويبل تعتمد على عامل نمط الطاقة (energy pattern factor) والذى يُرمز له

بالرمز (E_{pf})، وهو يتعلق بمتوسط بيانات سرعة الرياح، حيث تكون الصيغة الخاصة بمتوسط توزيع ويبل الاحتمالى لسرعة الرياح كالتالى:

$$\bar{t} = \theta \Gamma \left[1 + \frac{1}{\beta} \right] \tag{29}$$

وللحصول على معلمتى الشكل (β) والقياس (θ) لتوزيع ويبل باستخدام هذه الطريقة، فإنه يتم حساب energy pattern factor (E_{pf}) فى البداية، حيث أن هذا المعامل مرتبط بمتوسط بيانات سرعة الرياح ويتم تعريفه على أنه النسبة بين متوسط سرعة الرياح المكعبة $(\bar{t}_{cub})$ إلى مكعب متوسط سرعة الرياح $(\bar{t})^3$ ، ويتم الحصول على متوسط سرعة الرياح المكعبة $(\bar{t}_{cub})$ باستخدام الصيغة التالية:

$$\bar{t}_{cub} = \theta^3 \Gamma \left[1 + \frac{3}{\beta} \right]$$

وبالتالى يمكن التعبير عن (E_{pf}) باستخدام الصيغة التالية:

$$E_{pf} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i^3}{\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i\right]^3} = \frac{\bar{t}^{3}_{cub}}{(\bar{t})^3} = \frac{\Gamma(1+\frac{3}{\beta})}{\Gamma^3(1+\frac{1}{\beta})} \tag{30}$$

وباستخدام المعامل (E_{pf}) فى المعادلة (٣٠) يمكن تقدير معلمتى توزيع ويبل كالآتى:

$$\hat{\beta}_{pdm} = 1 + \frac{3.69}{(E_{pf})^2} \quad , \quad \hat{\theta}_{pdm} = \frac{\bar{t}}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{\hat{\beta}}\right)}$$

٤- المحاكاة (simulation)[٤ ، ١٠، ١٨]

تُعد طريقة مونت كارلو (Mont – Carlo) والتى تستخدم فى توليد المشاهدات لمعظم التوزيعات الإحصائية المعروفة من أهم طرق المحاكاة وأكثرها شيوعًا، وسوف

يتم استخدامها فى توليد بيانات حقيقية تتبع توزيع ويبل ذى المعلمتين من قيم افتراضية للمعلمتين θ و β وعند أحجام عينات مختلفة وفقاً للمراحل التالية:

- **المرحلة الأولى:**

هى المرحلة الرئيسية التى يعتمد عليها خطوات البرنامج وإجراءاته، حيث تمر بالخطوات التالية:

١- اختيار قيم افتراضية أولية مختلفة لمعلمتى توزيع ويبل وهما معلمة القياس (θ) ومعلمة الشكل (β).

٢- اختيار أحجام عينات مختلفة لتمثل العينات صغيرة الحجم والمتوسطة والكبيرة وهى ١٢٠ و ١٠٠ و ٧٥ و ٥٠ و ٢٠ = n

- **المرحلة الثانية:**

١- توليد أرقام عشوائية (U_t) تتبع التوزيع المنتظم ضمن الفترة (١ , ٠):

$$U_t \sim U_{(0,1)} \qquad , \qquad t = 1, 2, \ldots, n$$

٢- تحويل البيانات المولدة والتى تتبع التوزيع المنتظم إلى توزيع ويبل ذى المعلمتين باستخدام دالة التوزيع التجميعية لتوزيع ويبل $F(t_i)$ كالتالى:

$$F(t_i) = 1 - \exp\left(-\frac{t_i^{\beta}}{\theta}\right) \tag{31}$$

$$\exp\left(-\frac{t_i^{\beta}}{\theta}\right) = 1 - F(t_i)$$

وبافتراض أن $U_i = F(t_i)$

$$\exp\left(-\frac{t_i^{\beta}}{\theta}\right) = 1 - U_i$$

(بأخذ لوغاريتم الطرفين)

$$-\frac{t_i^{\beta}}{\theta} = \ln(1 - U_i)$$

$$t_i^{\beta} = -\theta \ln(1 - U_i)$$

$$t_i = \left[-\theta \ln (1-U_i)\right]^{\frac{1}{\beta}} \tag{32}$$

حيث أن U_i يمثل متغير عشوائى منتظم مستمر على الفترة (0 , 1).

- **المرحلة الثالثة:**

فى هذه المرحلة يتم تقدير معلمتى توزيع ويبل β ، θ وكذلك دالة الموثوقية بالطرق الخمسة المذكورة، ويكرر ذلك عدد (R) من المرات.

- **المرحلة الرابعة:**

فى هذه المرحلة يتم المقارنة بين مقدرات معلمتى القياس (θ) والشكل (β) لتوزيع ويبل ذو المعلمتين باستخدام معيار متوسط مربعات الخطأ (MSE) وخطأ التحيز المطلق للمتوسط (MABE) لدالة الموثوقية كالتالى:

$$MSE\left[\hat{R}(t_i)\right]=\frac{1}{R}\sum_{i=1}^{R}\left[R(t_i)-\hat{R}(t_i)\right]^2 \tag{33}$$

حيث أن:

$R(t_i)$: الوسط الحسابى لقيم دالة الموثوقية الحقيقية (الافتراضية) لعدد R تجربة.

$\hat{R}(t_i)$: الوسط الحسابى لقيم دالة الموثوقية حسب الطريقة المستخدمة فى التقدير لعدد R تجربة.

R : عدد مرات تكرار التجربة. ، t_i: تمثل أزمنة التشغيل حتى حدوث الفشل.

$$MABE\left[\hat{R}(t_i)\right]=\frac{1}{R}\sum_{i=1}^{R}\left|E_i-O_i\right| \tag{3٤}$$

حيث تمثل E_i ، O_i التكرارات المقدرة والمشاهدة على الترتيب.

٥- الجانب التطبيقى

٥-١ نتائج المحاكاة:

تناول هذا الجانب استخدام المحاكاة فى توليد بيانات تتبع توزيع ويبل ذى المعلمتين لعدة نماذج وبقيم افتراضية لمعلمتى القياس والشكل وعند أحجام عينات مختلفة، وفقاً لستة نماذج يوضحها جدول (١).

جدول (١): نماذج توزيع ويبل محل الدراسة

النموذج	١	٢	٣	٤	٥	٦
معلمة القياس (θ)	١	١	١.٥	١.٥	٢	٢
معلمة الشكل (β)	٠.٥	١	١.٥	٢	٢.٥	٣

وذلك لتقدير معلمات التوزيع ودالة الموثوقية بطرق التقدير المقترحة فى هذا البحث كما بالجدول (٢)، كما أنه سوف يتم مقارنة النتائج بالاعتماد على معيارى متوسط مربعات الخطأ (MSE) وخطأ التحيز المطلق للمتوسط (MABE) كما بجدولى ٣ ، ٤ بهدف الوصول إلى أفضل طريقة لتقدير دالة الموثوقية، وذلك بالاعتماد على الحزمة البرمجية R.

جدول (٢): تقديرات معلمتى توزيع ويبل بالطرق المختلفة

Model	n	MLE		MOM		Mix		RRM		PDM	
		$\hat{\theta}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\theta}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\theta}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\theta}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\theta}$	$\hat{\beta}$
1	20	0.6821	0.7624	0.9632	0.7631	1.0138	0.5214	0.8911	0.5013	0.8382	0.5213
	50	0.7263	1.5328	1.6021	0.8432	1.0822	0.5031	0.9782	0.5108	1.1471	0.5638
	75	0.7321	1.4325	2.0322	0.7318	1.0331	0.4328	0.9854	0.4972	1.0828	0.4972
	100	0.8235	0.7781	1.7523	0.7082	1.1026	0.6314	1.0038	0.5024	1.2741	0.4731
	120	0.7963	0.9234	2.1311	0.6974	1.1832	0.6532	1.0136	0.5114	0.9173	0.4013
2	20	0.6832	0.9738	0.9633	2.1378	1.0141	0.9638	0.9312	1.0284	0.7168	0.6314
	50	0.7271	1.3215	1.8019	1.1254	1.0825	1.0314	0.9781	1.0182	0.8932	0.9328
	75	0.9362	1.7832	1.6338	1.6103	1.0342	1.1831	0.9855	1.1761	0.9362	1.0213
	100	0.9145	0.9382	2.0536	1.9283	1.1038	1.0371	1.0038	1.0825	1.0214	0.8752
	120	0.6932	1.0281	1.5328	1.1282	1.1836	1.3833	1.0133	1.0314	1.2833	0.9138
3	20	1.6382	0.8356	1.6382	1.6312	1.6382	1.5632	1.5283	1.6138	1.6314	1.4325
	50	1.8453	2.1639	1.7214	2.1218	1.5141	1.5815	1.5185	1.5653	1.8652	1.5014
	75	2.5625	1.3325	1.9312	1.6351	1.5034	1.5214	1.4354	1.5313	1.6252	1.2528
	100	2.0183	1.8346	1.1282	0.9638	1.6136	1.5032	1.6288	1.5062	1.3341	1.8253
	120	2.2653	0.9725	0.8532	0.8325	1.3872	1.5144	1.5359	1.5225	1.5562	1.6253
4	20	1.9258	0.9782	1.9328	2.6328	1.5138	2.0315	1.6213	2.1251	1.5328	1.7632
	50	2.6143	2.0314	1.8315	3.1251	1.5732	2.1432	1.3851	1.9822	1.9213	2.2254
	75	2.8352	1.6282	1.6214	2.1328	1.5125	2.1253	1.5732	2.1825	1.6352	2.3825
	100	2.3252	0.9213	1.7251	1.6319	1.5114	2.0852	1.5028	2.0351	1.4352	1.9763
	120	1.7622	1.2013	1.1328	2.1638	1.4962	2.1514	1.5351	2.0312	1.7382	2.3924
5	20	1.3825	3.6332	3.0325	1.6352	2.1562	2.3987	2.1536	2.6412	2.1402	2.6552
	50	3.1369	3.9734	2.5214	2.1468	2.0823	2.5038	2.0831	2.5151	2.2315	2.7138
	75	3.3652	3.1266	2.1286	2.7964	2.3963	2.5524	2.1328	2.6132	2.7963	2.8842
	100	2.9374	2.6352	2.8314	2.8325	2.2975	2.6031	2.1414	2.5155	2.5514	2.5613
	120	4.3382	4.0204	2.9562	2.6628	2.0732	2.5132	2.0319	2.5914	1.9962	2.3825
6	20	1.7352	4.8352	2.1328	2.5223	2.2314	1.8352	2.1825	2.9134	2.2563	1.7631
	50	2.6144	4.7636	2.6344	2.8312	1.9216	3.2421	2.0441	3.3215	2.2112	2.7815
	75	1.6872	4.2833	2.2836	2.2883	2.0713	3.1052	2.1512	2.9416	1.8215	3.3522
	100	1.9733	3.7763	2.8323	3.7961	2.0215	2.8628	2.0311	3.0332	1.9913	2.8914
	120	1.8738	3.1821	2.5524	3.8631	2.1438	2.9341	1.9738	3.1415	2.3213	3.1303

جدول (3): متوسط مربعات الخطأ (MSE) لتقديرات دالة الموثوقية لجميع الطرق

Model	n	MLE	MOM	MIX	RRM	PDM	Best
1	20	0.027301	0.018635	0.008263	0.004541	0.025346	RRM
	50	0.025181	0.013259	0.006572	0.003508	0.021839	RRM
	75	0.022637	0.010962	0.005431	0.001497	0.016372	RRM
	100	0.021413	0.010264	0.005128	0.000481	0.015234	RRM
	120	0.019732	0.010128	0.004267	0.000397	0.014385	RRM
2	20	0.025384	0.015274	0.005872	0.002835	0.018324	RRM
	50	0.025131	0.015133	0.005138	0.002214	0.018029	RRM
	75	0.019632	0.014324	0.004256	0.001731	0.017596	RRM
	100	0.017318	0.009172	0.003872	0.001589	0.013825	RRM
	120	0.015536	0.008751	0.001629	0.000671	0.011736	RRM
3	20	0.027381	0.017628	0.006431	0.003156	0.019362	RRM
	50	0.025347	0.011328	0.005284	0.003025	0.017591	RRM
	75	0.022636	0.007351	0.003976	0.002681	0.013825	RRM
	100	0.022501	0.007163	0.002753	0.001722	0.011264	RRM
	120	0.017382	0.006682	0.002013	0.000537	0.008362	RRM
4	20	0.031628	0.020139	0.003628	0.001128	0.009365	RRM
	50	0.028591	0.019782	0.001792	0.000717	0.007814	RRM
	75	0.026327	0.019264	0.001163	0.000706	0.007325	RRM
	100	0.022561	0.018631	0.001085	0.000523	0.005872	RRM
	120	0.008715	0.017276	0.000962	0.000341	0.005364	RRM
5	20	0.033574	0.023815	0.004728	0.002892	0.007938	RRM
	50	0.031258	0.022736	0.004362	0.002161	0.007514	RRM
	75	0.029782	0.021035	0.003654	0.000738	0.005864	RRM
	100	0.026324	0.017362	0.001832	0.000692	0.003972	RRM
	120	0.023857	0.013028	0.000793	0.000514	0.003158	RRM
6	20	0.035284	0.028361	0.004253	0.001983	0.006328	RRM
	50	0.034371	0.022573	0.003968	0.001285	0.006152	RRM
	75	0.028562	0.007362	0.003537	0.001028	0.005629	RRM
	100	0.026381	0.007152	0.001628	0.000534	0.004728	RRM
	120	0.022743	0.002854	0.000976	0.000512	0.003655	RRM

جدول (٤): خطأ التحيز المطلق للمتوسط (MABE) لتقديرات دالة الموثوقية لجميع الطرق

Model	n	MLE	MOM	MIX	RRM	PDM	Best
1	20	0.049385	0.038462	0.025683	0.016358	0.044285	RRM
	50	0.046213	0.036285	0.023974	0.016179	0.042687	RRM
	75	0.044387	0.034791	0.022638	0.016084	0.042138	RRM
	100	0.042163	0.033825	0.021549	0.015839	0.041769	RRM
	120	0.041877	0.031056	0.021163	0.015764	0.041325	RRM
2	20	0.047625	0.035362	0.023671	0.015863	0.043726	RRM
	50	0.046827	0.035182	0.022834	0.015728	0.043259	RRM
	75	0.044726	0.034619	0.021763	0.014632	0.042863	RRM
	100	0.043921	0.034453	0.017593	0.014351	0.042215	RRM
	120	0.043268	0.029754	0.016825	0.013976	0.041637	RRM
3	20	0.049473	0.037428	0.024823	0.015982	0.044382	RRM
	50	0.048652	0.035271	0.023754	0.015263	0.043261	RRM
	75	0.046915	0.027463	0.023518	0.014736	0.042853	RRM
	100	0.045537	0.024682	0.017392	0.014521	0.041685	RRM
	120	0.043893	0.019756	0.016835	0.013864	0.040293	RRM
4	20	0.049865	0.039628	0.020385	0.014768	0.039758	RRM
	50	0.047322	0.039152	0.018562	0.014629	0.039674	RRM
	75	0.046038	0.038625	0.017674	0.014211	0.039287	RRM
	100	0.044835	0.031794	0.015873	0.013683	0.038825	RRM
	120	0.039624	0.029731	0.014628	0.012963	0.035962	RRM
5	20	0.051639	0.041652	0.022583	0.012735	0.042563	RRM
	50	0.050316	0.040183	0.021626	0.012283	0.041792	RRM
	75	0.048215	0.039152	0.020823	0.011731	0.040853	RRM
	100	0.046953	0.037284	0.017935	0.011386	0.039576	RRM
	120	0.043182	0.035268	0.015638	0.011297	0.038827	RRM
6	20	0.053748	0.043526	0.021694	0.011369	0.049628	RRM
	50	0.051629	0.041825	0.021182	0.010852	0.048163	RRM
	75	0.047262	0.032571	0.016358	0.010263	0.047037	RRM
	100	0.046381	0.031652	0.012837	0.010214	0.046158	RRM
	120	0.045873	0.026371	0.009735	0.006213	0.043591	RRM

ومن خلال النتائج الموضحة فى جدولى ٣ ، ٤ يتبين أنه عند جميع أحجام العينات (n = 20 , 50 , 75 , 100 , 120) كانت طريقة انحدار الرتبة Rank Regression Method (RRM) هى الأفضل فى تقدير معلمتى توزيع ويبل وهما $\hat{\theta}$ ، $\hat{\beta}$ حيث تتضمن أقل قيمة لكل من متوسط مربعات الخطأ (MSE) وخطأ التحيز المطلق للمتوسط (MABE) مقارنة بجميع الطرق الأخرى المستخدمة فى هذا البحث، يليها على الترتيب طريقة الخليط Mixture Method (Mix)، طريقة العزوم Method of Moments (MOM)، طريقة كثافة القوة Power Density Method (PDM)، ثم أخيراً طريقة الإمكان الأكبر Maximum Likelihood (MLE). كما يلاحظ أيضًا أنخفاض قيمة متوسطات مربعات الخطأ بزيادة حجم العينة لجميع طرق التقدير المستخدمة.

٥-٢ نتائج التطبيق على فاقد محصول القمح فى مصر:

بالاستناد إلى ما سبق استعراضه فى الإطار النظرى لتوزيع ويبل ذى المعلمتين وتقدير معالمه وفقاً للطرق المقترحة ومن ثم المقارنة بينهم لمعرفة أفضل طريقة تقدير والتى تتضمن أقل قيمة لكل من متوسط مربعات الخطأ وخطأ التحيز المطلق للمتوسط، تم تجميع البيانات المستخدمة فى هذا البحث والخاصة بفاقد محصول القمح فى مصر عن الفترة ٢٠٠٠ – ٢٠٢٢ من وزارة الزراعة واستصلاح الأراضى، قطاع الشئون الاقتصادية كما يوضحه جدول (٥).

جدول (٥): نسب الفاقد الانتاجى فى محصول القمح فى مصر
خلال الفترة ٢٠٠٠ – ٢٠٢٢

٢٠٠٠	٢٠٠١	٢٠٠٢	٢٠٠٣	٢٠٠٤	٢٠٠٥	٢٠٠٦	٢٠٠٧
٠.٠٦٧٨	٠.٠٦٢٨	٠.٠٧٠٢	٠.٠٦٣٨	٠.٠٦٥٥	٠.١٤٣٣	٠.١٦٨	٠.١٨٦٦
٢٠٠٨	٢٠٠٩	٢٠١٠	٢٠١١	٢٠١٢	٢٠١٣	٢٠١٤	٢٠١٥
٠.٢٠٠٦	٠.١٨٨٣	٠.٢٦١١	٠.٤٠٣٣	٠.٣٥٦	٠.٣٤٦٢	٠.٣٤٩١	٠.٤٣١١
٢٠١٦	٢٠١٧	٢٠١٨	٢٠١٩	٢٠٢٠	٢٠٢١	٢٠٢٢	
٠.٤٦٧٣	٠.٤٩١٨	٠.٥١٠١	٠.٤٩٠٧	٠.٤٦٤٦	٠.٤٣٢٥	٠.٤١٢٧	

المصدر: جمعت وحسبت من وزارة الزراعة واستصلاح الأراضى، قطاع الشئون الاقتصادية، نشرة الميزان الغذائى، أعداد متفرقة.

كما يوضح جدول (٦) متوسط فئات نسب الفاقد الإنتاجى وتكراراتها لمحصول القمح فى مصر خلال هذه الفترة.

جدول (٦): التوزيع التكرارى لنسب فاقد محصول القمح فى مصر

فئات الفاقد	٠-	٠.١-	٠.٢-	٠.٣-	٠.٤-	٠.٥-
التكرار	٥	٤	٢	٣	٨	١

وقد تم استخدام برنامج Excel فى تقدير متوسط وتباين نسب فاقد القمح خلال الفترة المحددة فكانت النتائج هى $\bar{t} = 0.2884$ ، var (t) = 0.0267.

٥-٣ اختبار صلاحية توزيع ويبل لتمثيل البيانات محل الدراسة

$$\text{Mean} = \theta^{\frac{1}{\beta}}\,\Gamma\left(\frac{1}{\beta}+1\right) = 0.2884$$

$$\text{var} = \theta^{\frac{2}{\beta}}\left[\Gamma\left(\frac{\beta+2}{\beta}\right) - \Gamma\left(\frac{\beta+1}{\beta}\right)\right] = 0.0267$$

وبالتالى يمكن الحصول على معلمتى القياس والشكل لتوزيع ويبل، حيث تكون قيمة كل منهما هى ٠.١٢٧٧ = β = ١.٨٢٨٨ ،θ (بحل المعادلتين معاً)، وبعد ذلك يتم اختبار البيانات المستخدمة فى هذا البحث كونها تتبع توزيع ويبل أم لا باستخدام اختبار كلمجروف سميرنوف، حيث كانت الفروض الإحصائية لهذا الاختبار كالتالى:

H_0 : البيانات تتبع توزيع ويبل

H_1 : البيانات لا تتبع توزيع ويبل

ويوضح جدول (٧) نتائج هذا الاختبار

جدول (٧): اختبار جودة التوفيق للبيانات باستخدام اختبار كلمجروف سميرنوف

فئات نسب فاقد القمح	التكرار "تصاعدى"	التكرار النسبى	التكرار النسبى التراكمى	الاحتمال التراكمى لتوزيع ويبل	الفرق المطلق
٠.٥ – ٠.٦	١	٠.٠٤٣٥	٠.٠٤٣٥	٠.١٣٠١	٠.٠٨٦٦
٠.٢ – ٠.٣	٢	٠.٠٨٦٩	٠.١٣٠٤	٠.٣٩٠٦	٠.٢٦٠٢
٠.٣ – ٠.٤	٣	٠.١٣٠٤	٠.٢٦٠٨	٠.٤٤٦٣	٠.١٨٥٥
٠.١ – ٠.٢	٤	٠.١٧٣٩	٠.٤٣٤٧	٠.٦٢٧٨	٠.١٩٣١
٠ – ٠.١	٥	٠.٢١٧٤	٠.٦٥٢٢	٠.٨٢٩٠	٠.١٧٦٨
٠.٤ – ٠.٥	٨	٠.٣٤٧٨	١	٠.٩٩٨١	٠.٠٠١٩
المجموع	**٢٣**	**١**			

يتضح من جدول (٧) بعد حساب الاحتمالات التراكمية لتوزيع ويبل باستخدام المعلمات المقدرة أن أكبر فرق مطلق بين التوزيع التراكمى لتوزيع ويبل والتكرار التراكمى النسبى المحسوب من البيانات هو ٠.٢٦٠٢، وهو يمثل القيمة المحسوبة لاختبار كلمجروف سميرنوف، وحيث أن هذه القيمة أصغر من القيمة الجدولية المستخرجة من جدول اختبار كلمجروف سميرنوف عند مستوى معنوية ٥% وحجم عينة ٢٣ وهى ٠.٢٧٥، فإنه يتم قبول الفرض الأصلي والذى يقضى بتبعية بيانات نسب فاقد محصول القمح فى مصر لتوزيع ويبل.

٤-٥ تقدير معلمتى توزيع ويبل للبيانات الحقيقية باستخدام طرق التقدير المقترحة

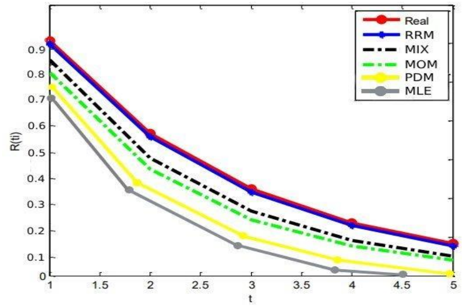
فى هذا الجزء سوف يتم تناول عرض وتحليل النتائج التى تم التوصل إليها بتطبيق طرق التقدير الخمسة على البيانات الحقيقية والخاصة بنسب فاقد محصول القمح فى مصر، وذلك لتقدير معالم وموثوقية توزيع ويبل الاحتمالى، بالإضافة إلى عمل

مقارنة بين هذه الطرق باستخدام معيارى متوسط مربعات الخطأ (MSE) وخطأ التحيز المطلق للمتوسط (MABE) وكذلك قيمة دالة الموثوقية كما هو موضح فى الجدول (٨).

جدول (٨): القيم المقدرة باستخدام البيانات الحقيقية لجميع طرق التقدير

Method	MLE	MOM	MIX	RRM	PDM
$\hat{\theta}$	1.1539	1.7248	1.6835	1.6352	1.5381
$\hat{\beta}$	1.8304	2.8744	2.2139	2.1385	1.8735
MSE	0.0427	0.0351	0.0038	0.0014	0.0408
MABE	0.0518	0.0413	0.0237	0.0126	0.0427
$\hat{R}(t_i)$	0.7258	0.8356	0.8973	0.9216	0.7632

يتضح من نتائج جدول (٧) أن طريقة انحدار الرتبة Rank Regression Method (RRM) هى أفضل طرق التقدير لأن لديها أقل قيمة لكل من متوسط مربعات خطأ (MSE) وخطأ التحيز المطلق للمتوسط (MABE) وكذلك أكبر قيمة لدالة الموثوقية $\hat{R}(t_i)$ ، يليها على الترتيب طريقة الخليط Mixture Method (Mix)، طريقة العزوم Method of Moments (MOM)، طريقة كثافة القوة Power Density Method (PDM)، وأخيراً طريقة الإمكان الأكبر Maximum Likelihood Method (MLE)، ويتضح ذلك أيضاً من خلال شكل (٢) الذى يوضح نتائج الطرق المختلفة لتقدير الموثوقية لتوزيع ويبل ذى المعلمتين .



شكل رقم (٢)

نتائج الطرق المختلفة لموثوقية توزيع ويبل ذى المعلمتين

ويتفق ذلك أيضاً مع نتائج المحاكاة فى الجانب التجريبى من هذا البحث.

النتائج:

بعد تنفيذ تجارب المحاكاة فى الجانب التجريبى لأحجام عينات مختلفة صغيرة ومتوسطة وكبيرة (٢٠ ، ٥٠ ، ٧٥ ، ١٠٠ ، ١٢٠) لتقدير دالة الموثوقية بالطرق الخمسة المقترحة فى هذا البحث، وكذلك تقدير دالة الموثوقية لبيانات حقيقية لعينة حجمها ٢٣ مشاهدة فى الجانب التطبيقى توصل الباحث إلى النتائج التالية:

١- أفضلية طريقة انحدار الرتبة Rank Regression Method (RRM) فى الجانبين التجريبى والتطبيقى لجميع الحالات وأحجام العينات المستخدمة فى البحث، وذلك من خلال معيارى متوسط مربعات الخطأ (MSE) وخطأ التحيز المطلق للمتوسط (MABE).

٢- أتضح من نتائج المحاكاة والجانب التطبيقى أيضًا أن المقدر المختلط (Mix) أفضل من المقدرين الآخرين وهما الإمكان الأكبر (MLE) والعزوم (MOM)، حيث أنه يمثل تركيب خطى من المقدرين معًا.

٣- أتفقت نتائج الجانبين التجريبى باستخدام المحاكاة والتطبيقى أيضًا على أن طريقتى الخليط Mixture Method (Mix) والعزوم Method of Moments (MOM) كانتا ثانى وثالث أفضل طريقة على التوالى وذلك لتحقيقهما ثانى وثالث أقل قيمة لكلا من متوسط مربعات خطأ (MSE)

وخطأ التحيز المطلق للمتوسط (MABE) لجميع الحالات وأحجام العينات المستخدمة فى البحث.

٤- أتفقت أيضاً نتائج الجانبين التجريبى والتطبيقى على أن طريقة الإمكان الأكبر (MLE) Maximum Likelihood Method كانت أسوء طريقة لجميع الحالات وأحجام العينات المستخدمة فى البحث، حيث أنها حققت أكبر قيمة لكل من متوسط مربعات الخطأ (MSE) وخطأ التحيز المطلق للمتوسط (MABE).

٥- أظهر الجانب التجريبى باستخدام المحاكاة تناقص قيمة متوسط مربعات الخطأ (MSE) مع ازدياد حجم العينة ولجميع الحالات، ويتطابق ذلك مع النظرية الإحصائية.

٦- ملائمة توزيع ويبل ذو المعلمتين لتمثيل بيانات فاقد القمح فى مصر، وذلك باستخدام اختبار كلمجروف سميرنوف لجودة التوفيق.

التوصيات:

١- اعتماد طريقة (RRM) Rank Regression Method لتقدير دالة الموثوقية لتوزيع ويبل ذو المعلمتين عند أحجام العينات المختلفة.

٢- إجراء مزيد من الدراسات فى حالة البيانات المفقودة وتوزيع ويبل ذو الثلاث معالم، وتقدير معلماتها باستخدام عدة طرق.

٣- استخدام مقدرات مختلطة بتركيبة خطية من مقدرات مختلفة عن ما تم التطرق إليه فى هذا البحث، أو من ثلاث مقدرات خطية معًا.

٤- استخدام طرق تقدير أخرى لم يتم التطرق إليها فى هذا البحث مثل طريقة Term Omission Method (TOM)، أو طرق لامعلمية مثل طريقتى دالة التوزيع التراكمى (Cumulative Distribution Function) ودالة الخطورة (Hazard Function) والمقارنة بينهم.

المراجع:

أولاً: المراجع العربية

١- **الباقر، زينب محمد. (٢٠١٧):** تقديرات دالة المعولية لتوزيع بواسون مع تطبيق عملى، رسالة ماجستير علوم فى الإحصاء، كلية الإدارة والاقتصاد، جامعة كربلاء.

٢- **العبيدى، مكى أكرم وآخرون. (٢٠١٠):** المقارنة بين طريقتين لاختبار مطابقة بيانات لتوزيع ويبل ذى المعلمتين. مجلة أبحاث ميسان، مجلد (٦)، العدد (١٢).

٣- **بدر، حسين دريد والحكيم، معانى أحمد. (٢٠١٩):** مقارنة بعض طرائق تقدير دالة المعولية لتوزيع ويبل ذى المعلمتين باستخدام المحاكاة. مجلة كلية الرافدين الجامعة للعلوم، العدد ٤٥.

٤- **جلوب، إسماعيل هادى وشفيق، بلسم مصطفى. (٢٠١٣):** مقارنة بعض طرائق التقدير البيزية مع طرائق أخرى لتوزيع ريلى لبيانات تحت المراقبة من النوع الأول باستخدام المحاكاة، مجلة الإدارة والاقتصاد، العدد (٩٧).

٥- **جعفر، صادق مولى وآخرون. (٢٠٠٩):** أفضل تقدير لمعلولية ويبل ذى المعلمتين، مجلة بغداد للعلوم، مجلد (٦)، العدد (٤).

٦- **حسين، ضوية سلمان وآخرون. (٢٠٠٨):** استخدام المقدر المقلص فى تقدير معلمة الشكل لتوزيع ويبل، مجلة جامعة النهرين، المجلد (١١)، العدد (٣).

٧- **راهى، عبد الرحيم خلف وشرهان، رائد فيصل. (٢٠١٩):** تقدير معلمات توزيع ويبل باستخدام طريقة المربعات الصغرى الاعتيادية وطريقة المربعات الصغرى الموزونة – دراسة مقارنة. مجلة الإدارة والاقتصاد، العدد (١٢٢).

٨- **رشيد، هدى عبد الله وآخرون. (٢٠١٢):** مقارنة بعض مقدرات بيز لدالة المعولية لنموذج ويبل عند دوال خسارة مختلفة، مجلة كلية العلوم – جامعة بغداد، مجلد (٢)، العدد (٥٣).

٩- **عطا، أمال وعباس، ناصر. (٢٠١٤):** تقدير معولية توزيع الفشل الخطى العام باستخدام المحاكاة. مجلة الهندسة والتكنولوجيا، المجلد (٣٢)، العدد (١).

١٠- **فدعم، انتصار عريبى ومحمد، بشير فيصل. (٢٠١٢):** مقارنة لبعض الطرائق المعلمية واللامعلمية لتقدير دالة المعولية باستخدام المحاكاة، مجلة الإدارة والاقتصاد، جامعة بغداد، العدد (٩١).

١١- **قمر، سيف الدين هاشم وعبود، حسام نجم. (٢٠١٦):** استخدام المحاكاة للمقارنة بين تقدير معلمات دالة توزيع ويبل حسب طريقة الإمكان الأعظم وطريقة بيز. مجلة الدنانير، كلية الإدارة والاقتصاد، العدد (٩).

١٢- محمود، شيماء وليد. **(٢٠١٩):** تقدير دالة المعولية للبيانات الكاملة. المجلة العراقية للعلوم الإحصائية، العدد (٣٠).

ثانياً: المراجع الأجنبية:

13. Akdag S.A., Ali, D. (2009): A new method to estimate Weibull parameters for wind energy applications. Energy Convers. Manag. Vol. (50), No (7).
14. Almazah, M.A. and Ismail, M. (2021): Selection of Efficient Parameter Estimation Method for Two-Parameter Weibull Distribution. Mathematical Problems in Engineering, Vol 2021.

https//doi.org/10.1155/2021/5806068.

15. Egwim, K.C., Eke C.N. Onuoha, D.O. (2015): Comparative analysis of methods of estimating 2-parameter Weibull Distribution. Vol (5), No (2).
16. Felix, N.N., Chukwudi A. (2014): A Comparison of Methods for the estimation of Weibull Distribution Parameters. Metodoloski Zvezki, Vol (11), No (1).
17. Gyan, P. & Dinesh, C. (2009): Estimation of the Weibull shape parameter in failure censored sampling under the linex lost. Metron-International Journal of Statistics, Vol (LXVll), No (1).
18. Mittal, S., Durak, U., Oren, T. (2017): Guide to Simulation-Based Disciplines – Advancing our Computational Future. Springer.
19. Nwobi, F.N. and Ugomma, C.A. (2014): A comparison of Methods for the Estimation of Weibull Distribution Parameters – Department of Statistics, Imo State University, Nigeria, Vol. 11, No. 1.
20. Onay, A. E. Dokur, E. and Kurban, M. (2021): Performance Comparisom of New Generation Parameter Estimation Methods for Weibull Distribution to Compute Wind Energy Density. Department of Energy Systems Engineering, Bilecik S.E. University, Turkey, Wol. 27, No. 5.
21. Paula A.C., Ricardo C.S. Carla F., D. (2012): Comparision of seven numerical methods for determining Weibull parameters for wind energy generation I the northeast region of Brazil. Appl. Energy. 89.

22. Salahaddin A., Ahmed (2013): Comparative study of four methods for estimating Weibull parameters for Halabja-Iraq. International Journal of Physical Sciences. Vol (8), No (5).
23. Teyabeen, A.A. Akkari, F. and Jwaid, A. (2017): Comparison of Seven Numerical Methods for Estimating Weibull Parameters for Wind Energy Applications. International Conference on Modelling & Simulation, Nottingham Trent University, Vol. 17, No. 1.